Matemática para o Ensino Básico IV

José Elias dos Santos Filho

São Cristóvão/SE
2011

Disciplina: Matemática para o Ensino Básico IV

Prof. Ms. José Elias Dos Santos Filho
Curso de Licenciatura em Matemática – **UFPB**VIRTUAL
elias@ccae.ufpb.br

Ambiente Virtual de Aprendizagem: Moodle www.ead.ufpb.br
Site da **UFPB**VIRTUAL www.virtual.ufpb.br
Site do curso www.mat.ufpb.br/ead
Telefone **UFPB**VIRTUAL (83) 3216 7257

Carga horária: 60 horas **Créditos: 04**

Ementa

Matrizes, Determinantes, Sistemas de Equações Lineares e Geometria Analítica.

Descrição

Nesta disciplina trabalharemos os conceitos de Matrizes, Sistemas Lineares, Determinantes e Geometria Analítica, conceitos estes já vistos no ensino médio. Usaremos uma metodologia que permita ao aluno analisar e interpretar criticamente as informações apresentadas.

Iniciaremos o conteúdo sempre baseados em uma situação-problema, devido ao fato de estarmos diariamente em contato com conceitos matemáticos, seja ao ler ou assistir jornal, acompanhar a tabela do campeonato brasileiro de futebol, percorrer uma trilha ecológica com o auxílio de um GPS, entre outras situações.

A situação-problema é o ponto de partida e não uma definição. Desta forma o aluno é levado a pensar nos conceitos, nas idéias e nos métodos matemáticos que envolvem tais problemas para que possa desenvolver algum tipo de estratégia na resolução de problemas.

O programa desta disciplina está dividido em cinco unidades. Iniciamos, na unidade I, pelo estudo das Matrizes enfatizando as operações básicas e suas propriedades, devido ao fato de estarmos freqüentemente em contato com tabelas e planilhas eletrônicas no nosso dia-a-dia e poucas situações-problemas que envolvam Sistemas Lineares. Na segunda unidade trataremos do estudo dos Sistemas Lineares, embora muitos autores do ensino médio apresentem este conteúdo após o estudo de Matrizes e Determinantes. Nesta segunda unidade enfatizaremos o método por escalonamento na resolução de Sistemas Lineares de qualquer ordem por considerarmos o método mais eficaz.

Julgamos ser mais oportuno apresentar o conteúdo de Determinantes na terceira unidade, pois o esse conceito surge naturalmente pela necessidade de tornar mais prática a resolução de Sistemas Lineares. Nela, além de aprendermos a calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem, mostraremos que é possível, através do determinante, classificar um Sistema Linear de n equações e n incógnitas, bem como determinar se uma matriz quadrada possui inversa. Estudaremos também algumas de suas propriedades, buscando facilitar a resolução dos problemas propostos.

O estudo da Geometria Analítica será apresentado nas unidades IV e V. Na unidade IV dedicamos ao estudo do Ponto e da Reta. O estudo das cônicas (Circunferência, Parábola, Elipse e Hipérbole) está contemplado na unidade V, na qual apresentaremos alguns métodos práticos para construção de algumas cônicas.

Objetivos

- Conhecer os conceitos apresentados sobre Matrizes, Sistemas Lineares, Determinantes e Geometria Analítica;
- Desenvolver habilidade na resolução de problemas dos conteúdos apresentados;
- Relacionar observações do mundo real com os conceitos matemáticos apresentados;
- Identificar e classificar as cônicas por meio de suas equações;

- Representar o problema "real" através do modelo matemática que corresponde a um sistema linear.

Unidades Temáticas Integradas

Unidade I Matrizes

- Conceito e Definições;
- Matrizes Quadradas;
- Matrizes Triangulares;
- Matriz Identidade;
- Igualdade de Matrizes;
- Operações com Matrizes;
- Matrizes Especiais.

Unidade II Sistemas de Equações Lineares

- Definição de Sistemas Lineares;
- Classificação de um Sistema Linear;
- Resolução de um Sistema Linear.

Unidade III Determinantes

- Conceitos e Definições;
- Menor Complementar;
- Cofator;
- Teorema de Laplace;
- Propriedades dos Determinantes;
- Aplicações do Determinante.

Unidade IV Geometria Analítica I: Estudo do Ponto e da Reta

- Cálculo da Distância entre dois Pontos;
- Coordenadas do Ponto Médio;
- Equações da Reta;
- Posição Relativas de duas Retas;
- Estudo Complementar da Reta.

Unidade V Geometria Analítica II: Estudo das Cônicas

- Circunferência;
- Posição de um Ponto em Relação a uma Circunferência;
- Posições Relativas entre Reta e Circunferência;
- Posições Relativas entre duas Circunferências.
- Parábola;
- Elipse;
- Hipérbole.

Unidade I- Matrizes

1- Situando a Temática

Através de situações-problemas desencadearemos os conceitos sobre matrizes, construindo nosso conhecimento sobre operações com matrizes com a finalidade de apresentar soluções para os problemas propostos. Por exemplo, ao acompanharmos o Campeonato Brasileiro de Futebol lidamos com a tabela dos jogos que é atualizada a cada rodada. Ou seja, nossos alunos estão constantemente em contato com o conceito de matriz, no entanto muitos encontram dificuldades em associar a tabela do Campeonato, que discute com os amigos no seu dia-a-dia, com o conhecimento de matriz adquirido em sala de aula.

2- Problematizando a Temática

No nosso dia-a-dia vemos freqüentemente em jornais e revistas a presença de tabelas relativas aos mais variados assuntos, apresentando números dispostos em linhas e colunas. Desta forma as matrizes constituem um importante instrumento de cálculo com aplicações em Matemática, Engenharia, Administração, Economia e outras ciências.

Observe por exemplo a seguinte situação:

Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com as seguintes especificações:

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Tabela I

Para os três primeiros meses do ano, a meta de produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Modelo/ Meses	Jan	Fev	Mar
A	30	20	25
B	25	18	20
C	20	15	10

Tabela II

Utilizaremos o estudo sobre matrizes para descobrir quantos eixos e rodas são necessários, em cada um dos meses, para que a montadora atinja a meta de produção planejada.

Trocando Experiência...

Como falamos anteriormente, preferimos iniciar nosso estudo com as matrizes, pelo fato de nossos alunos já estarem mais familiarizados com tabelas, quadros numéricos e planinhas eletrônicas como, por exemplo, tabelas de campeonatos, bingos e trabalhos realizados na planilha Excel. No Moodle serão disponibilizadas várias situações-problemas as quais servirão como dicas de como iniciar este conteúdo em sala de aula. Participe e dê também sua contribuição para que juntos possamos compartilhar experiências e opiniões.

3- Conhecendo a Temática

3.1- Conceito e Definições

Chamamos de matriz m x n (lê-se m por n) com $m,n \in IR$ qualquer tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela será representada entre parênteses ( ), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas $\| \|$.

Exemplos 1: De acordo com a tabela I, descrita anteriormente, podemos construir uma matriz M do tipo 2x3 da forma

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, utilizando a tabela II temos a seguinte matriz

$$N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz do tipo 3x3. Observe que a meta de produção de cada modelo no mês fevereiro está representada na segunda coluna. O elemento posicionado na terceira linha e primeira coluna da matriz N, a_{31} indica que a meta de produção do modelo C no mês de janeiro é de 20 unidades.

Podemos representar genericamente uma matriz M do tipo m x n da seguinte maneira:

$$M_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \left[a_{ij} \right]_{mxn} \text{ com } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Observações:

I) Quando a matriz possuir uma única linha, recebe o nome de matriz linha.
II) Quando a matriz possuir uma única coluna, recebe o nome de matriz coluna.
III) Quando todos os elementos a_{ij} de uma matriz são iguais a zero ela se chama matriz nula.

Ampliando o seu conhecimento...

As matrizes desempenham um papel importante em muitas áreas da economia e da matemática aplicada. A matriz de insumo-produto e a matriz de Markov são exemplos de aplicações de matrizes na economia.

Algumas matrizes recebem nomes especiais devido às suas características específicas como a matriz linha e a matriz coluna, já vistas. A seguir veremos algumas dessas matrizes.

3.2- Matrizes Quadradas

Quando em uma matriz $M = \left[a_{ij} \right]_{mx\,n}$ tivermos $m=n$, diz-se que a matriz é uma matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 2: No exemplo anterior vemos que a matriz $N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

Numa matriz quadrada $M=\left[a_{ij}\right]_{nx\,n}$, os elementos a_{ij} tais que $i=j$ formam a diagonal principal da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i+j=n+1$ formam a diagonal secundária.

Desta forma temos o seguinte exemplo:

$$N=\begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária   Diagonal principal

3.3- Matrizes Triangulares

Quando em uma matriz quadrada de ordem n tivermos todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal nulos, dizemos que a matriz é triangular.

Desta forma, em uma matriz triangular, $a_{ij}=0$ para $i>j$ ou $a_{ij}=0$ para $i<j$.

> **Observação:** Caso os elementos a_{ij} de uma matriz triangular sejam tais que $a_{ij}=0$ para $i\neq j$, tal matriz é chamada de matriz diagonal.

Exemplos 3:

I) A matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular de ordem 3.

II) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal, que também é classificada como matriz triangular.

3.4- Matriz Identidade

Uma matriz de ordem n em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos, ou seja, $a_{ij}=1$ se $i=j$ e $a_{ij}=0$ para $i\neq j$, é denominada matriz identidade e será representada por I_n.

No exemplo 3.II a matriz $I_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 4.

3.5- Igualdade de Matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $M=\left[a_{ij}\right]_{m\mathrm{x}\,n}$ e $N=\left[b_{ij}\right]_{m\mathrm{x}\,n}$, dizemos que $M=N$ se, e somente se, $a_{ij}=b_{ij}$ para todo $1\leq i\leq m$ e $1\leq j\leq n$.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo matrizes. Acesse a plataforma e participe!

3.6- Operações com Matrizes

Uma empresa especializada em calçados é formada por duas lojas A e B. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de calçados nos quatro primeiros dias de dezembro, foram obtidos os resultados representados nas seguintes tabelas:

Quantidade Vendida na Loja A				
	1º Dia	2º Dia	3º Dia	4º Dia
Modelo 1	2	3	1	5
Modelo 2	1	2	5	3

Tabela I

Quantidade Vendida na Loja B				
	1º Dia	2º Dia	3º Dia	4º Dia
Modelo 1	3	0	2	3
Modelo 2	4	2	4	5

Tabela II

Como já foi visto anteriormente, as tabelas acima podem ser representadas pelas respectivas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

Note que a matriz *A* acima descreve o desempenho da loja *A*, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo *i* no dia *j*; por exemplo, o elemento $a_{23} = 5$ informa que foram vendidas cinco unidades do modelo 2 no 3º dia.

Sabendo que o modelo 1 é vendido por R$ 62,00 e o modelo 2 por R$65,00, que poderíamos representar pela matriz $P = \begin{bmatrix} 62 & 65 \end{bmatrix}_{1x2}$. Como representaríamos, matricialmente, a quantidade faturada diariamente pela empresa na venda dos modelos de calçados em estudo?

Continuaremos com o estudo das matrizes para que possamos ampliar nossos conhecimentos e utilizar tais conhecimentos na resolução de problemas.

Trocando Experiência...

Este problema inicial, proposto nesta seção, poderá ser apresentado aos alunos em sala de aula através de um estudo em grupo onde os mesmos poderão discutir e tentar apresentar uma solução com suas próprias iniciativas e experiências. O que você acha desta dica? Compartilhe sua opinião na plataforma Moodle.

3.6.1- Adição de Matrizes

Definição: A soma de duas matrizes do mesmo tipo $A = \left[a_{ij} \right]_{mx\,n}$ e $B = \left[b_{ij} \right]_{mx\,n}$, que se indica por *A* + *B* é a matriz $C = \left[c_{ij} \right]_{mx\,n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo 4: Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\text{x}4} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\text{x}4}$,

obtidas no problema proposto anteriormente, temos que:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Observação: Note que a matriz $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ descreve o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados. Desta forma, por exemplo, o elemento $c_{23} = 9$ informa que foram vendidas nove unidades do modelo 2 no 3º dia.

3.6.1.1-Propriedades da Adição de Matrizes

Sendo *A, B* e *C* matrizes do mesmo tipo, é possível verificar que as seguintes propriedades são válidas.

I) Comutatividade: ***A* + *B* = *B* + *A***.
II) Associatividade: ***(A + B) + C= A + (B + C)***.
III) Elemento Neutro: ***A* + *0* = *0* + *A* = *A***, em que zero representa a matriz nula do mesmo tipo que ***A***.
IV) Elemento Oposto: Para toda matriz ***A*** existe a matriz oposta, denominada ***–A***, tal que ***A* + (–*A*) = (–*A*) + *A* = *0***, onde ***0*** (zero) é a matriz nula.

Observação:
I) A matriz oposta de uma matriz $A = \left[a_{ij} \right]_{mx\,n}$ é a matriz $-A = \left[b_{ij} \right]_{mx\,n}$ tal que $b_{ij} = -a_{ij}$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.
II) Denomina-se diferença entre as matrizes do mesmo tipo *A* e *B*, e representada por *A* − *B*, como sendo a soma da matriz *A* pela matriz oposta de *B*, ou seja, *A* – *B* = *A* + (–*B*).

3.6.2- Multiplicação de um número por uma Matriz

Definição: O produto de um número *k* por uma matriz $A = \left[a_{ij} \right]_{mx\,n}$, que se indica por *kA*, é a matriz $B = \left[b_{ij} \right]_{mx\,n}$ tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

3.6.2.1- Propriedades da Multiplicação de um número por uma Matriz

Sendo *A* e *B* matrizes do mesmo tipo e *r* e *s* números reais, demonstra-se que:

I) *(r + s)A = rA + sA*
II) *r(A + B) = rA + rB*
III) *r(sA) = (r.s)A*
IV) *1.A = A*

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo este conteúdo. Acesse e participe!

3.6.3- Multiplicação de Matrizes

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras já estudadas. Vamos introduzi-la por meio do problema proposto nesta unidade.

No início da seção 3.6, obtivemos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2x4} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2x4}.$$

Através da soma entre as matrizes *A* e *B* obtemos a matriz $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ (ver exemplo 4), a qual representa o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados. A matriz $P = \begin{bmatrix} 62 & 65 \end{bmatrix}_{1x2}$ nos diz que o modelo 1 é vendido por R$62,00 enquanto o modelo 2 é vendido por R$65,00.

Sabemos que o faturamento na venda de certo produto é dado pela multiplicação entre o preço e a quantidade vendida. Observe que, pela matriz C, no primeiro dia foram vendidas 5 unidades do modelo 1 e 5 unidades do modelo 2 e desta forma podemos afirmar que no primeiro dia a empresa obteve um faturamento de 62•5 + 65•5 = 635 reais na venda dos dois novos modelos de calçados.

Desta forma utilizando este raciocínio, obteremos a matriz

$$F = [62\cdot5 + 65\cdot5 \quad 62\cdot3 + 65\cdot4 \quad 62\cdot3 + 65\cdot9 \quad 62\cdot8 + 65\cdot8] = [635 \quad 446 \quad 771 \quad 1.016]$$

que representa o faturamento diário com a venda dos dois modelos de calçados pela empresa, apresentado pela tabela

Faturamento com os modelos 1 e 2 de calçados em Dezembro.				
Dia	1º	2º	3º	4º
Valor (R$)	635,00	446,00	771,00	1.016,00

Esse problema sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes $P_{1x2} . C_{2x4} = F_{1x4}$.

Vejamos agora a definição matemática da multiplicação de matrizes:

Definição: Dadas as matrizes $M = \left[a_{ij} \right]_{m \times n}$ e $N = \left[b_{ij} \right]_{nxp}$, o produto de *M* por *N* é a matriz *M•N* = $[c_{ij}]_{mxp}$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha ***i***, da matriz ***M***, pelos elementos da coluna ***j***, da matriz ***N***, e somando-se os produtos obtidos.

> **Observação:**
> Note que só definimos o produto *M•N* de duas matrizes quando o número de colunas de *M* for igual ao número de linhas de *N*; além disso, note ainda que o produto *M•N* possui o número de linhas de *M* e o número de colunas de *N*.

Exemplo 5: Dada as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$, determinar *M•N*.

Primeiramente vemos que *M* é uma matriz 2x3 e *N* é uma matriz 3x3 e assim o número de colunas de *M* é igual ao número de linhas de *N*. Portanto o produto *M•N* é possível e será uma matriz 2x3.

Logo

$$M.N = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

Tem-se assim:

c_{11} : usa-se a 1º linha de *M* e a 1º coluna de *N*

2•30 + 3•25 + 4•20 = 215

c_{12} : usa-se a 1º linha de *M* e a 2º coluna de *N*

$2 \cdot 20 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 15 = 174$

c_{13} : usa-se a 1º linha de M e a 3º coluna de N

$2 \cdot 25 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 150$

c_{21} : usa-se a 2º linha de M e a 1º coluna de N

$4 \cdot 30 + 6 \cdot 25 + 8 \cdot 20 = 430$

c_{22} : usa-se a 2º linha de M e a 2º coluna de N

$4.20+6.18+8.15 = 308$

c_{23} : usa-se a 2º linha de M e a 3º coluna de N

$4 \cdot 25 + 6 \cdot 20 + 8 \cdot 10 = 300$

Concluindo teremos $M.N = \begin{bmatrix} 215 & 174 & 150 \\ 430 & 308 & 300 \end{bmatrix}$.

> **Observação:** No início da unidade I, seção 2, descrevemos o problema de uma indústria montadora de caminhões, cujo objetivo é responder a seguinte questão: quantos eixos e rodas a montadora deve encomendar em cada um dos meses, para atingir a meta estabelecida?

O problema apresentava as seguintes tabelas

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Tabela I

Modelo/ Meses	Jan	Fev	Mar
A	30	20	25
B	25	18	20
C	20	15	10

Tabela II

as quais representamos pelas matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{2x3}$ e $N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}_{3x3}$.

> **Observação:**
> Não é válida a propriedade do cancelamento, isto é, se *M, N e P* são matrizes tais que $M \cdot N = M \cdot P$, não podemos garantir que $N = P$.

Realizando o produto $M \cdot N$ obtemos a matriz $M.N = \begin{bmatrix} 215 & 174 & 150 \\ 430 & 308 & 300 \end{bmatrix}$ que representa a seguinte tabela:

Peças/Mês	Jan	Fev	Mar
Eixos	215	174	150
Rodas	430	308	300

3.6.3.1- Propriedades da Multiplicação de Matrizes

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, são válidas as seguintes propriedades:

I) Associatividade: $(M \cdot N) \cdot P = M \cdot (N \cdot P)$

II) Distributiva em relação a soma: $M \cdot (N + P) = M \cdot N + M \cdot P$ **e** $(M + N) \cdot P = M \cdot P + N \cdot P$

III) Elemento Neutro: $M \cdot I_n = I_n \cdot M = M$ onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

> **Observação:**
> Não é válida a propriedade Comutativa, pois, em geral $M.N \neq N.M$ ou até pode existir $M \cdot N$ e não existir $N \cdot M$. Por exemplo, se M for $2x3$ e N for $3x4$ existe o produto $M \cdot N$ que será uma matriz $2x4$, no entanto não existe $N \cdot M$.

Exercício: Dada as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ confirme a afirmação acima.

> **Observação:**
> Não é válida a propriedade do cancelamento, isto é, se *M, N e P* são matrizes tais que $M \cdot N = M \cdot P$, não podemos garantir que $N = P$.

Exercício: Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ confirme a afirmação acima.

> **Observação:**
> Não é válida a propriedade do anulamento, isto é, se *M* e *N* são matrizes tais que $M \cdot N = 0_{mxn}$ não podemos garantir que uma delas *(M ou N)* seja a matriz nula.

Exercício: Dada as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ confirme a afirmação acima.

3.7- Matrizes Especiais

3.7.1- Matriz Transposta

Considere a seguinte tabela:

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Tabela I

Se transformarmos as linhas dessa tabela em colunas e as colunas em linhas obteremos uma nova tabela dada por:

Modelos/Componentes	Eixo	Rodas
A	2	4
B	3	6
C	4	8

Observe que as informações dadas por ambas as tabelas não se modificam, no entanto a representação matricial de cada uma das tabelas são matrizes diferentes.

Definição: Seja *M* uma matriz *m* x *n*. Chamamos de matriz transposta de *M*, denotada por M^t, a matriz *n* x *m* cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de *M*.

Exemplo 6: Vimos, no exemplo acima, que a matriz transposta de $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{2x3}$ é a matriz

$$M^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{3x2}.$$

3.7.1.1- Propriedades da Matriz Transposta

Seja *M* uma matriz *m* x *n*.

i) $(M^t)^t = M$.
ii) $(k \cdot M)^t = k \cdot M^t$, onde *k* é um número real.
iii) $(M + N)^t = M^t + N^t$.
iv) $(M \cdot N)^t = N^t \cdot M^t$.

3.7.2-Matriz Simétrica

Dada uma matriz quadrada M de ordem n, dizemos que M é uma matriz simétrica se, e somente se, $M = M^t$.

Exercício: Calcule a,b,c sabendo que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & a \\ 3 & b & c+1 \\ -4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ é simétrica.

3.7.3- Matriz Inversa

Dada uma matriz quadrada M de ordem n, se existir uma matriz X, de mesma ordem, tal que $M{\cdot}X = X{\cdot}M = I_n$, então X é denominada matriz inversa de M e é denotada por M^{-1}.

Exercício: Mostre que matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Observação:

Quando existir a matriz inversa de M, dizemos que M é invertível ou não singular. A existência ou não da matriz inversa e sua determinação, quando existir, será estudada e analisada nas unidades posteriores.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo operações entre matrizes, principalmente aplicações de matrizes, bem como o software Winmat que você poderá, não só usar como apoio na resolução de problemas, como também disponibilizá-lo para seus futuros alunos. Na disciplina Informática Aplicada à Matemática você terá oportunidade de discutir a utilização de softwares em sala de aula.

4- Avaliando o que foi construído

Nesta Unidade tivemos a oportunidade de apresentar o conceito de matrizes por meio de algumas situações problemas. Conhecemos e discutimos ainda algumas matrizes especiais bem como realizamos operações com as mesmas.

Através dos exercícios disponibilizados na plataforma Moodle, tivemos oportunidade não só de resolver problemas, mas discutir idéias para que possam ser utilizadas em sala de aula.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações.** 2ª ed. São Paulo: Ática. Vol. 1. 2000.

2. IEZZI, G. Dolce, O. Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 1, Editora Atual, 8ª ed. 2004.

3. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna. Vol. 2. 2002.

4. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

5. LIMA, Elon L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 3, 2ª Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.